Thema: Geladene Teilchen im elektrischen und magnetische Feld

Aufgabe 1

Protonen werden im Vakuum aus der Ruhelage durch die Spannung $U_B = 800V$ auf die Geschwindigkeit v_0 beschleunigt. Sie treten bei P (Abb.1 – siehe Material) senkrecht zu den elektrischen Feldlinien in das Feld eines Plattenkondensators ein (Plattenabstand $d = 6,0\,cm$, Plattenlänge $L = 30\,cm$, Kondensatorspannung $U_K = 200V$). Das Feld zwischen den Platten sei homogen.

1.1 In R treffen die Protonen auf die negativ geladene Kondensatorplatte.
Berechne die Entfernung $\overline{QR} = \sqrt{\frac{2 \cdot d^2 \cdot U_B}{U_K}}$!
Leite die angegebene Formel begründet her!

1.2 Dem elektrischen Feld des Kondensators soll nun ein Magnetfeld mit der magnetischen Flussdichte $B = 10\,mT$ so überlagert werden, dass Protonen, die mit einer Geschwindigkeit v_1 in P in den Kondensator eintreten, diesen geradlinig durchfliegen!
Bestimme und begründe die Richtung des Magnetfelds!
Berechne die Geschwindigkeit $v_1 = \frac{U_K}{d \cdot B}$!
Leite diese Formel begründet her!

1.3 Beschreibe und erläutere, was mit einem *Elektron* geschieht, das unter den Bedingungen der Teilaufgabe 1.2 mit der Geschwindigkeit v_1 in den Kondensator eintritt?

Aufgabe 2

2.1 Mit einem Zyklotron sollen Ionen des schweren Wasserstoffs beschleunigt werden. Die Ladung der Ionen beträgt $Q = 1,602 \cdot 10^{-19} C$, ihre Masse $m = 3,343 \cdot 10^{-27} kg$. Die magnetische Flussdichte B soll von $0T$ bis $1T$ stufenlos regelbar sein.
Berechne die Winkelgeschwindigkeit ω der Teilchen für $B = 1T$!
Erläutere die Abhängigkeit der Winkelgeschwindigkeit vom Bahnradius und die Bedeutung dieser Abhängigkeit für das Zyklotron!

2.2 Der maximale Bahnradius beträgt 100 cm. Bestimme die Bahngeschwindigkeit v am Ende des Beschleunigungsvorganges unter den bei 2.1 angegebenen Bedingungen!
Erläutere die Abhängigkeit der Bahngeschwindigkeit vom Bahnradius und die Bedeutung dieser Abhängigkeit für das Zyklotron!

2.3 Berechne die Spannung, die erforderlich wäre, um den Ionen in einem homogenen elektrischen Feld die gleiche Geschwindigkeit zu verleihen, die in einem Zyklotron unter den Bedingungen erreicht wird, die in 2.2 gegeben sind!

Aufgabe 3

Abb.2 (siehe Material) zeigt eine horizontal ausgerichtete lange Spule der Länge L mit N Windungen, die von einem konstanten Strom $I \neq 0$ durchflossen wird. Die Elektronen erhalten ihre Geschwindigkeit $\vec{v_0}$ vor dem Eintritt in die Spule in einem elektrischen Feld der Spannung $U_A \neq 0$, besitzen also im Punkt P die Geschwindigkeit $\vec{v_0}$.

P liegt links in der Mitte zwischen den Platten eines kleinen Plattenkondensators K, an den eine Spannung angelegt werden kann, und ist der Mittelpunkt der linken Querschnittsfläche der Spule. Die Spule befindet sich in einer Vakuumkammer.

3.1 Zu Beginn des Versuchs liegt noch keine Spannung an den Platten. Beschreibe und begründe die Bewegung der Elektronen durch die Röhre und die Beobachtung auf dem Schirm!

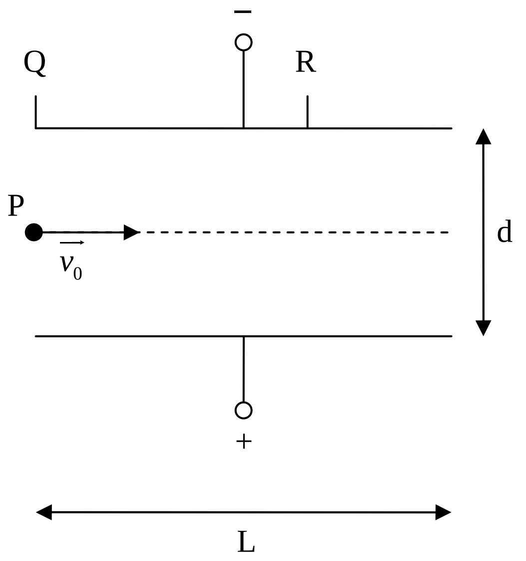
3.2 An den Kondensator wird jetzt eine Gleichspannung angelegt, so dass die Elektronen unter dem Winkel α mit der Geschwindigkeit $\vec{v}$ in die Spule geschossen werden.
Begründe: Die Bahnkurve, auf der sich die Elektronen der Geschwindigkeit v durch die Spule bewegen, ist eine Schraubenlinie!

Zeige begründet, dass für den Radius der Schraubenlinie gilt: $r = \dfrac{\tan(\alpha) \cdot L \cdot \sqrt{\dfrac{2 \cdot m \cdot U_A}{e}}}{\mu_0 \cdot N \cdot I}$!

3.3 Legt man an den Kondensator eine Wechselspannung, so ändert sich der Winkel α periodisch zwischen $\alpha_{\max}$ und $-\alpha_{\max}$.
Beschreibe und erläutere die Elektronenbahnen in der Röhre und deine erwartete Beobachtung auf dem Schirm!

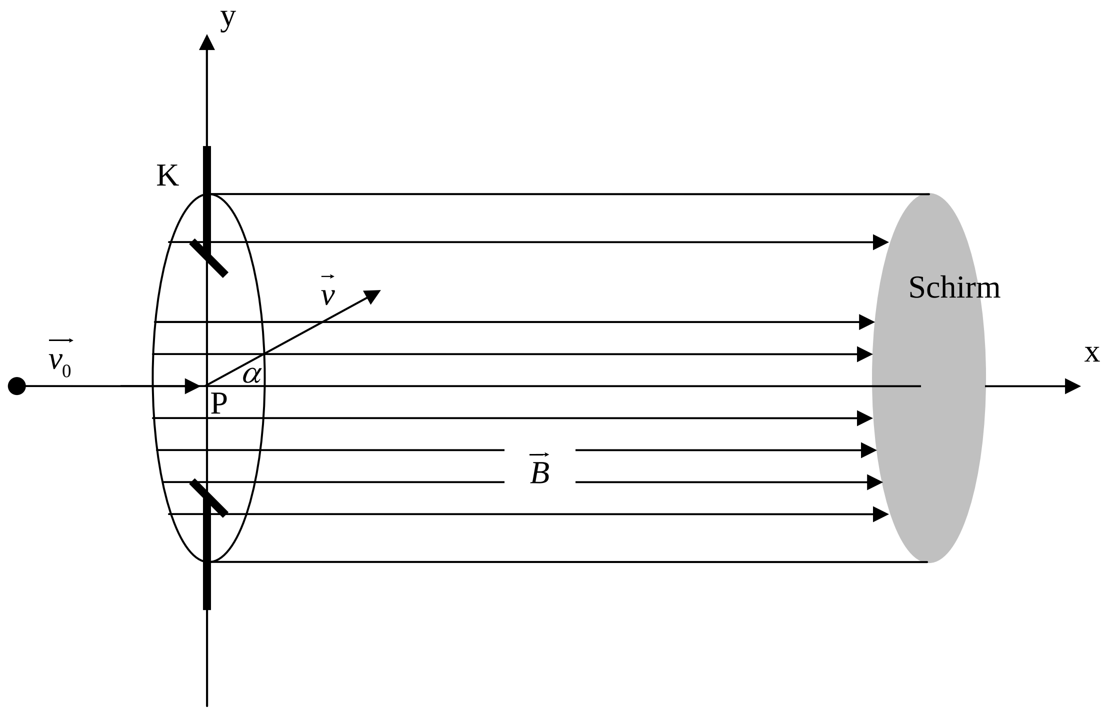
Material zur Aufgabe 1

Abb.1



Material zur Aufgabe 3

Abb.2



Lösungen:

Aufgabe 1

Protonen werden im Vakuum aus der Ruhelage durch die Spannung $U_B = 800V$ auf die Geschwindigkeit v_0 beschleunigt. Sie treten bei P (Abb.1 – siehe Material) senkrecht zu den elektrischen Feldlinien in das Feld eines Plattenkondensators ein (Plattenabstand $d = 6{,}0\,cm$, Plattenlänge $L = 30\,cm$, Kondensatorspannung $U_K = 200V$). Das Feld zwischen den Platten sei homogen.

1.1 In R treffen die Protonen auf die negativ geladene Kondensatorplatte.

Berechne die Entfernung $\overline{QR} = \sqrt{\frac{2 \cdot d^2 \cdot U_B}{U_K}}$!

Leite die angegebene Formel begründet her!

Waagerecht fliegen die Protonen mit der Geschwindigkeit $v = \sqrt{\frac{2eU_B}{m_P}}$. Waagerecht liegt eine gleichförmige Bewegung vor, und es wird der Weg $x = \overline{QR} = v \cdot t = t \cdot \sqrt{\frac{2eU_B}{m_P}}$ zurückgelegt. Senkrecht wirkt auf die Protonen die elektrische Feldkraft $F_{el} = e \cdot E = e \cdot \frac{U_K}{d}$ beschleunigend. Für den senkrecht zurückgelegten Weg gilt also $y = \frac{d}{2} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2$. Die Beschleunigung ist $a = \frac{F_{el}}{m_P} = \frac{e \cdot \frac{U_K}{d}}{m_P} = \frac{e \cdot U_K}{d \cdot m_P}$. Damit gilt für den vertikalen Weg: $y = \frac{d}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{e \cdot U_K}{d \cdot m_P} \cdot t^2$. Mit $t = \frac{\overline{QR}}{\sqrt{\frac{2eU_B}{m_P}}}$ folgt:

$$\frac{d}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{e \cdot U_K}{d \cdot m_P} \cdot \frac{\overline{QR}^2}{\frac{2eU_B}{m_P}} \Leftrightarrow \overline{QR} = \sqrt{\frac{d \cdot 2 \cdot d \cdot m_P \cdot 2eU_B}{2 \cdot e \cdot U_K \cdot m_P}} = \sqrt{\frac{2 \cdot d^2 \cdot U_B}{U_K}} \approx 16{,}97\,cm$$

1.2 Dem elektrischen Feld des Kondensators soll nun ein Magnetfeld mit der magnetischen Flussdichte $B = 10\,mT$ so überlagert werden, dass Protonen, die mit einer Geschwindigkeit v_1 in P in den Kondensator eintreten, diesen geradlinig durchfliegen!

Bestimme und begründe die Richtung des Magnetfelds!

Berechne die Geschwindigkeit $v_1 = \frac{U_K}{d \cdot B}$!

Leite diese Formel begründet her!

Da die Protonen durch das elektrische Feld nach oben abgelenkt werden, muss das Magnetfeld sie nach unten ablenken, der Mittelfinger muss also nach unten zeigen. Da die Protonen nach rechts fliegen, muss der Daumen die Stromrichtung nach rechts anzeigen. Der Zeigefinger gibt jetzt die Richtung der Flussdichte an, er zeigt aus der Zeichenebene heraus (Drei-Finger-Regel).

Damit das Proton nicht abgelenkt wird, müssen sich die Lorentzkraft und die elektrische Kraft ausgleichen:

$e \cdot v_1 \cdot B = e \cdot E = e \cdot \frac{U_K}{d}$. Nach v_1 aufgelöst erhält man: $v_1 = \frac{U_K}{d \cdot B}$. Mit den Zahlenwerten der Aufgabe ergibt sich:

$v_1 \approx 3{,}3 \cdot 10^5 \frac{m}{s}$.

1.3 Beschreibe und erläutere, was mit einem Elektron geschieht, das unter den Bedingungen der Teilaufgabe 1.2 mit der Geschwindigkeit v_1 in den Kondensator eintritt?

Wie in Teil 1.2 gezeigt, hängt v_1 weder von der Ladung noch von der Masse des Teilchens in den gekreuzten Feldern ab.

Das Elektron wird also auch nicht abgelenkt, sondern fliegt gerade hindurch. Die elektrische Kraft zieht das Elektron nach unten, aber die Lorentzkraft wirkt auf das Elektron nach oben, wenn die Flussdichte aus der Zeichenebene heraus zeigt. Der Stromdaumen muss lediglich nach links zeigen, damit der Mittelfinger die Lorentzkraft korrekt angibt (Drei-Finger-Regel).

Aufgabe 2

In ein homogenes Magnetfeld der Flussdichte $\vec{B}$ werden Elektronen mit verschiedenen Geschwindigkeiten senkrecht zu den magnetischen Feldlinien eingeschossen. Dabei werden die Elektronen auf Kreisbahnen mit unterschiedlichen Radien gelenkt.

2.1 Mit einem Zyklotron sollen Ionen des schweren Wasserstoffs beschleunigt werden. Die Ladung der Ionen beträgt $Q = 1,602 \cdot 10^{-19} C$, ihre Masse $m = 3,343 \cdot 10^{-27} kg$. Die magnetische Flussdichte B soll von $0T$ bis $1T$ stufenlos regelbar sein.

Berechne die Winkelgeschwindigkeit ω der Teilchen für $1T$!

Erläutere die Abhängigkeit der Winkelgeschwindigkeit vom Bahnradius und die Bedeutung dieser Abhängigkeit für das Zyklotron!

Für die Winkelgeschwindigkeit gilt $\omega = \frac{v}{r}$. Im Zyklotron wirkt die Lorentzkraft als Zentralkraft:

$Q \cdot v \cdot B = \frac{m \cdot v^2}{r} \Leftrightarrow Q \cdot B = \frac{m \cdot v}{r} \Leftrightarrow v = \frac{Q \cdot B \cdot r}{m}$. Daraus folgt: $\omega = \frac{Q \cdot B \cdot r}{m \cdot r} = \frac{Q \cdot B}{m}$. Mit den Angaben aus der Aufgabe folgt: $\omega \approx 4,7927 \cdot 10^7 Hz$. Die Winkelgeschwindigkeit ist nicht vom Bahnradius abhängig, sondern auf allen Bahnen gleich. Die Beschleunigung im Zyklotron kann also durch ein elektrisches Wechselfeld konstanter Frequenz erfolgen.

2.2 Der maximale Bahnradius beträgt 100 cm. Bestimme die Bahngeschwindigkeit v am Ende des Beschleunigungsvorganges unter den bei 2.1 angegebenen Bedingungen!
Erläutere die Abhängigkeit der Bahngeschwindigkeit vom Bahnradius und die Bedeutung dieser Abhängigkeit für das Zyklotron!

Aus 2.2 folgt: $v = \frac{Q \cdot B \cdot r}{m} \approx 4,7927 \cdot 10^7 \frac{m}{s} \approx 16\% \cdot c$. Die Bahngeschwindigkeit vergrößert sich proportional zum Radius des Zyklotrons. Dies ist sehr sinnvoll, da die Teilchen aus der Mitte heraus beginnend mit kleinem Radius auf Bahnen immer größer werdenden Radius beschleunigt werden und dabei schließlich ihre Maximalgeschwindigkeit erreichen.

2.3 Berechne die Spannung, die erforderlich wäre, um den Ionen in einem homogenen elektrischen Feld die gleiche Geschwindigkeit zu verleihen, die in einem Zyklotron unter den Bedingungen erreicht wird, die in 2.2 gegeben sind!

In einem elektrischen Feld erhalten die Ionen die Energie: $e \cdot U = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2$. Also gilt:

$U = \frac{m \cdot v^2}{2 \cdot e} \approx 2,3963 \cdot 10^7 V \approx 24 MV$.

Aufgabe 3

Abb.2 (siehe Material) zeigt eine horizontal ausgerichtete lange Spule der Länge L mit N Windungen, die von einem konstanten Strom $I \neq 0$ durchflossen wird. Die Elektronen erhalten ihre Geschwindigkeit $\vec{v_0}$ vor dem Eintritt in die Spule in einem elektrischen Feld der Spannung $U_A \neq 0$, besitzen also im Punkt P die Geschwindigkeit $\vec{v_0}$.

P liegt links in der Mitte zwischen den Platten eines kleinen Plattenkondensators K, an den eine Spannung angelegt werden kann, und ist der Mittelpunkt der linken Querschnittsfläche der Spule. Die Spule befindet sich in einer Vakuumkammer.

3.1 Zu Beginn des Versuchs liegt noch keine Spannung an den Platten. Beschreibe und begründe die Bewegung der Elektronen durch die Röhre und die Beobachtung auf dem Schirm!

Die Elektronen fliegen koaxial durch die lange Spule mit der konstanten Geschwindigkeit $\vec{v_0}$. Sie erfahren keine Ablenkung durch das Magnetfeld, da sie parallel zu den Feldlinien fliegen. Auf dem Schirm sieht man einen zentralen Punkt.

3.2 An den Kondensator wird jetzt eine Gleichspannung angelegt, so dass die Elektronen unter dem Winkel α mit der Geschwindigkeit $\vec{v}$ in die Spule geschossen werden.
Begründe: Die Bahnkurve, auf der sich die Elektronen der Geschwindigkeit v durch die Spule bewegen, ist eine Schraubenlinie!

Zeige begründet, dass für den Radius der Schraubenlinie gilt: $r = \dfrac{\tan(\alpha) \cdot L \cdot \sqrt{\dfrac{2 \cdot m \cdot U_A}{e}}}{\mu_0 \cdot N \cdot I}$!

Die Geschwindigkeit $\vec{v}$ kann in eine horizontale und in eine vertikale Komponente zerlegt werden. Die horizontale Komponente ist $\vec{v_0}$ und sorgt für eine gleichförmige horizontale Bewegung (siehe 2.1). Die vertikale Komponente steht senkrecht auf den magnetischen Feldlinien der Spule und lenkt die Elektronen auf eine Kreisbahn, da eine Lorentzkraft entsteht, die im ersten Moment aus der Zeichenebene heraus wirkt, sich dann aber mit der veränderten Richtung der Bahngeschwindigkeit mitdreht. Die Kreisbahn wird durch die gleichzeitige Bewegung nach rechts zu einer Schraubenlinie auseinander gezogen.

Für die Geschwindigkeit gilt: $\tan(\alpha) = \dfrac{v_{vertikal}}{v_0} \Leftrightarrow v_{vertikal} = v_0 \cdot \tan(\alpha)$. Für das Magnetfeld der langen Spule gilt:

$B = \mu_0 \cdot \dfrac{N \cdot I}{L}$. Die Lorentzkraft ist die Zentralkraft: $e \cdot v_{vertikal} \cdot B = \dfrac{m \cdot v_{vertikal}^{\;2}}{r} \Rightarrow r = \dfrac{m \cdot v_{vertikal}}{e \cdot B}$. Setzt man jetzt B ein, so erhält man: $r = \dfrac{m \cdot v_{vertikal}}{e \cdot \mu_0 \cdot \dfrac{N \cdot I}{L}} = \dfrac{L \cdot m \cdot v_{vertikal}}{e \cdot \mu_0 \cdot N \cdot I}$. Und mit $v_{vertikal} = v_0 \cdot \tan(\alpha)$ folgt: $r = \dfrac{L \cdot m \cdot v_0 \cdot \tan(\alpha)}{e \cdot \mu_0 \cdot N \cdot I}$. Da ein Elektron seine kinetische Energie aus dem elektrischen Feld bezieht, gilt: $e \cdot U_A = \dfrac{1}{2} \cdot m \cdot v_0^{\;2} \Leftrightarrow v_0 = \sqrt{\dfrac{2 \cdot e \cdot U_A}{m}}$. Es folgt

$$r = \frac{L \cdot m \cdot \sqrt{\dfrac{2 \cdot e \cdot U_A}{m}} \cdot \tan(\alpha)}{e \cdot \mu_0 \cdot N \cdot I} = \frac{L \cdot \sqrt{m \cdot 2 \cdot e \cdot U_A} \cdot \tan(\alpha)}{e \cdot \mu_0 \cdot N \cdot I} = \frac{L \cdot \sqrt{\dfrac{m \cdot 2 \cdot U_A}{e}} \cdot \tan(\alpha)}{\mu_0 \cdot N \cdot I}.$$

3.3 Legt man an den Kondensator eine Wechselspannung, so ändert sich der Winkel α periodisch zwischen $\alpha_{\max}$ und $-\alpha_{\max}$.
Beschreibe und erläutere die Elektronenbahnen in der Röhre und deine erwartete Beobachtung auf dem Schirm!

Da sich der Betrag der vertikalen Komponente der Geschwindigkeit zwischen null und einem Maximalwert verändert und ihre

Richtung aufwärts oder abwärts zeigt, gibt es eine Fülle von Schraubenlinien in der Spule mit unterschiedlichen Radien und zwei verschiedenen Drehrichtungen (im Uhrzeigersinn, wenn der Winkel positiv ist, entgegen dem Uhrzeigersinn bei negativem Winkel). Die Horizontalkomponente der Geschwindigkeit ist für alle Schraubenlinien gleich, also haben sie alle die gleiche Anzahl Windungen in der Spule. Da alle Schraubenlinie immer im gleichen Punkt P beginnen, endent sie in einem entsprechenden Punkt P' in der Mitte des Schirms, wenn eine ganze Anzahl Schraubenwindungen in die Spule passen, denn die Umlaufzeit auf einer Kreisbahn im Magnetfeld ist unabhängig vom Radius ist (siehe 2.1). Passt keine ganze Anzahl von Schraubenwindungen in die Spule, so endet die jeweilige Schraubenlinie in einem Punkt auf dem Bildschirm, der auf einer symmetrischen Strecke durch den Mittelpunkt des Bildschirms verläuft. Diese Strecke kann unterschiedlich gedreht und kürzer oder länger sein, je nachdem, wie viel einer ganzen Schraubenwindung „abgeschnitten“ wird.