

Thema: Potentialtopfmodell; Kernstrahlung

Aufgabe 1

Betrachte ein Atom mit dem Durchmesser $a = 0,5\text{nm}$ stark idealisiert als linearen Potentialtopf mit der Länge $a = 0,5\text{nm}$.

- a) *Erläutere* das Modell des linearen Potentialtopfes und *leite* die angegebene Gleichung für die möglichen Energiezustände *begründet her!*

$$E_n = \frac{h^2}{8 \cdot m_e \cdot a^2} \cdot n^2; \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

- b) *Berechne* die drei niedrigsten Energiezustände und die Frequenzen der hiermit erklärbaren Absorptions- bzw. Emissionslinien!
- c) Bei einem linearen Potentialtopf mit senkrechten Wänden ($E_{pot} \rightarrow \infty$) nimmt der Abstand aufeinander folgender Energieniveaus mit zunehmendem n ebenfalls zu.

Zeige: Soll der Abstand benachbarter Energieniveaus konstant E_1 sein, also $E_n = n \cdot E_1$, kann der Topf keine senkrechten Wände mehr besitzen, sondern muss die Form einer Parabel haben!

Aufgabe 2

Ein Radiumpräparat wird in *ca. 3cm* vor einem Geiger-Müller-Zählrohr angebracht. Zwischen Präparat und Zählrohr werden nun Aluminiumplättchen eingeschoben, ohne den Abstand zu verändern.

- a) *Untersuche* den funktionalen Zusammenhang zwischen der Impulszahl Z und der Dicke x der zu durchdringenden Aluminiumschicht mit deinem GTR (Abb1.)!
Skizziere den Graphen und *gib* die mit dem GTR gefundene Regression als physikalische Gleichung *begründet an!*
Nenne und erläutere die charakteristischen Größen deiner Untersuchung und *stelle ihren Bezug zu deiner Zeichnung her!*
- b) *Nenne begründet* die hier untersuchte Strahlungsart und *beschreibe* das Verhalten der beiden anderen Strahlungsarten!
- c) *Berechne* die Halbwertsdicke x_H *mit einem grundlegenden Ansatz!*

Aufgabe 3

Americium 241 sendet α -Teilchen aus.

- a) Die α -Teilchen bewegen sich im Vakuum nach Verlassen eines Geschwindigkeitsfilters mit der Energie von $E = 5,488\text{MeV}$ durch die in Abb.2 skizzierte Anordnung von links nach rechts. Der Bahnradius im homogenen Magnetfeld mit der magnetischen Flussdichte $B = 0,33\text{T}$ beträgt $r = 1\text{m}$.
Berechne aus den gegebenen Daten die Geschwindigkeit v der α -Teilchen sowie ihre spezifische Ladung!
Begründe, dass allein die Bestimmung der spezifischen Ladung nicht zur Identifizierung der α -Teilchen ausreicht!
- b) Das Geiger-Müller-Zählrohr ist ein Nachweisgerät für Kernstrahlung.
Skizziere die Zählrohrcharakteristik und *deute* den für eine Energiemessung geeigneten Bereich!
- c) Die ersten Tochterkerne von Americium 241 sind in unserer Formelsammlung nicht erkennbar.
Stelle mit Hilfe der Abb.3 und der Nuklidkarte aus unserer Formelsammlung die Zerfallsreihe von $\text{Am}241$ dar!
Skizziere das zu erwartende α -Energiespektrum, das mit einem Zählrohr aufgenommen werden könnte und *erläutere* seine Besonderheiten !

Material zur Aufgabe 1

Material zur Aufgabe 2

Abb.1

Dicke x/mm	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
Impulszahl $Z/10s$	6989	5895	4874	3932	3377	2802	2395	2010	1750	1438

Material zur Aufgabe 3

Abb.2

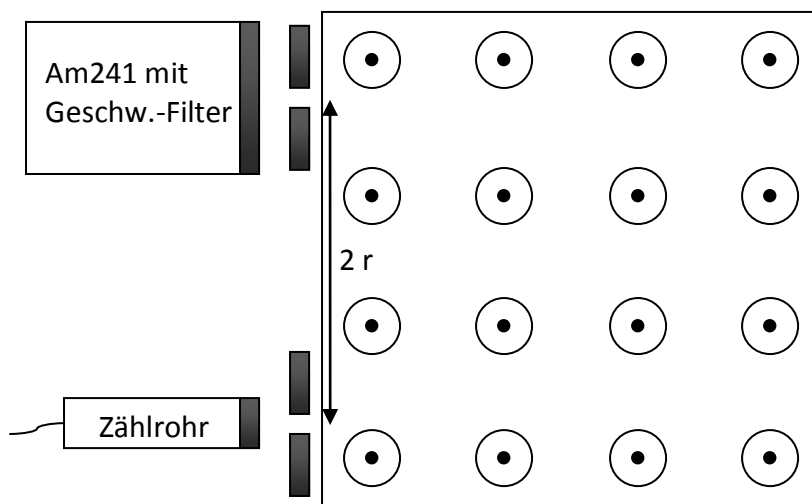
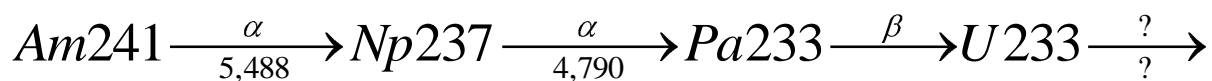


Abb.3



Lösungen

Aufgabe 1

Betrachte ein Atom mit dem Durchmesser $a = 0,5\text{nm}$ stark idealisiert als linearen Potentialtopf mit der Länge $a = 0,5\text{nm}$.

- a) *Erläutere* das Modell des linearen Potentialtopfes und *leite* die angegebene Gleichung für die möglichen Energiezustände *begründet her!*

$$E_n = \frac{h^2}{8 \cdot m_e \cdot a^2} \cdot n^2; \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

Im Modell des linearen Potentialtopfes wird das Teilchen (Elektron) in einem endlichen 1-dimensionalen Bereich eingesperrt, in dem es keine potentielle Energie besitzt. Aus diesem Bereich kann es nicht heraus, da an den Enden des Bereichs die potentielle Energie unendlich groß sein soll. Hier kann es sich also unwahrscheinlich aufhalten. Je nach Energiezustand des Elektrons gibt es verschiedene Bereiche, in denen sich das Elektron mit höherer Wahrscheinlichkeit aufhalten kann. Da stehende Wellen Energieknoten und -bäuche besitzen und außerdem in der Quantenphysik die Antreffwahrscheinlichkeit proportional zum Amplitudenquadrat der Welle ist, wählt man zur Beschreibung des Elektrons im Potentialtopf eine Wellenfunktion, die alle Eigenschaften einer stehenden Welle hat.

Auf der Länge a können nur ganzzahlig viele halbe Wellenlängen untergebracht werden, also gilt:

$$a = n \cdot \frac{\lambda}{2} \Leftrightarrow \lambda = \frac{2 \cdot a}{n}; \quad (n = 1, 2, \dots)$$

Die Gesamtenergie des Elektrons beträgt: $E_n = E_{pot} + E_{kin} = 0 + \frac{1}{2} \cdot m_e \cdot v^2 = \frac{p^2}{2 \cdot m_e}$ mit $p = m_e \cdot v$.

Nach de-Broglie gilt: $p = \frac{h}{\lambda}$, und damit folgt:

$$E_n = \frac{p^2}{2 \cdot m_e} = \frac{h^2}{\lambda^2 \cdot 2 \cdot m_e} = \frac{h^2}{\left(\frac{2a}{n}\right)^2 \cdot 2 \cdot m_e} = \frac{h^2}{8 \cdot m_e \cdot a^2} \cdot n^2, \text{ was zu zeigen war.}$$

- b) *Berechne* die drei niedrigsten Energiezustände und die Frequenzen der hiermit erklärbaren Absorptions- bzw. Emissionslinien!

Mit $n = 1$ folgt: $E_1 \approx 1,50\text{eV}$.

Mit $n = 2$ folgt: $E_2 = 4 \cdot E_1 \approx 6,02\text{eV}$.

Mit $n = 3$ folgt: $E_3 = 9 \cdot E_1 \approx 13,54\text{eV}$.

Die drei Energieniveaus lassen drei Übergänge und damit drei Frequenzen zu. Es gilt:

$$f_{2,1} \approx 1,0911 \cdot 10^{15} \text{ Hz}$$

$$h \cdot f_{m,n} = E_m - E_n \Rightarrow f_{m,n} = \frac{E_m - E_n}{h} = \frac{h}{8m_e a^2} (m^2 - n^2). \text{ Daraus folgt: } f_{3,1} \approx 2,9096 \cdot 10^{15} \text{ Hz}$$

$$f_{3,2} \approx 1,8185 \cdot 10^{15} \text{ Hz}$$

- c) Bei einem linearen Potentialtopf mit senkrechten Wänden ($E_{pot} \rightarrow \infty$) nimmt der Abstand aufeinander folgender Energieniveaus mit zunehmendem n ebenfalls zu.

Zeige: Soll der Abstand benachbarter Energieniveaus konstant E_1 sein, also $E_n = n \cdot E_1$, kann der Topf keine senkrechten Wände mehr besitzen, sondern muss die Form einer Parabel haben!

$$\text{Aus } E_n = n \cdot E_1 \text{ folgt: } \frac{h^2}{8 \cdot m_e \cdot a_n^2} \cdot n^2 = n \cdot \frac{h^2}{8 \cdot m_e \cdot a_1^2} \Rightarrow \frac{1}{a_n^2} \cdot n = \frac{1}{a_1^2} \Rightarrow a_1^2 \cdot n = a_n^2 \Rightarrow a_n = \sqrt{n} \cdot a_1. \text{ Lässt}$$

man in E_n also a mit dem Faktor \sqrt{n} „wachsen“, so wächst E_n wegen $E_n \sim \frac{n^2}{a^2}$ mit dem Faktor $\frac{n^2}{n} = n$, die Energieniveaus sind also gleichabständig. Die Zuordnung zwischen der Breite des Potentialtopfes a_n und der Energie lautet also: $\sqrt{n} \cdot a_1 \rightarrow n \cdot W_1$.

Aufgabe 2

Ein Radiumpräparat wird in *ca.* 3cm vor einem Geiger-Müller-Zählrohr angebracht. Zwischen Präparat und Zählrohr werden nun Aluminiumplättchen eingeschoben, ohne den Abstand zu verändern.

- a) *Untersuche* den funktionalen Zusammenhang zwischen der Impulszahl Z und der Dicke x der zu durchdringenden Aluminiumschicht mit deinem GTR (Abb1.)!
Skizziere den Graphen und *gib* die mit dem GTR gefundene Regression als physikalische Gleichung *begründet an!*
Nenne und erläutere die charakteristischen Größen deiner Untersuchung und *stelle ihren Bezug zu deiner Zeichnung her!*

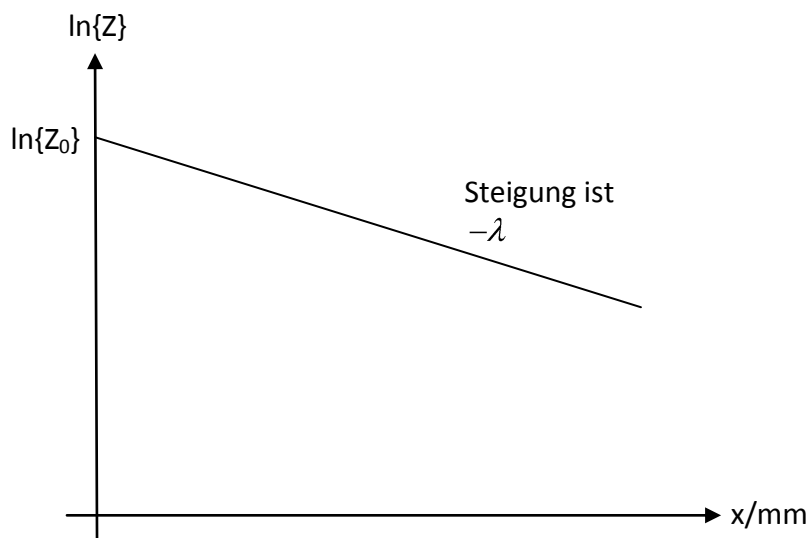
Die Werte der Tabelle in Abb.1 werden in den GTR eingegeben und der Logarithmus der Impulse gegen die Dicke graphisch dargestellt. Es ergibt sich eine Gerade.

Eine lineare Regression liefert: $y = -1,747516947 \cdot x + 9,010210936$. Dies bedeutet physikalisch:

$\ln\{Z\} = -\lambda \cdot x + \ln\{Z_0\}$. Die Abnahme der Impulse pro 10 Sekunden folgt also einer Exponentialfunktion mit der Gleichung $Z(d) = Z_0 \cdot e^{-\lambda \cdot d}$.

Die Rate zur Dicke $x = 0\text{mm}$ beträgt $Z_0 = e^{9,010210936} / 10\text{s} \approx 8186 / 10\text{s}$.

Die Absorptionskonstante beträgt $\lambda \approx 1,747516947 / \text{mm}$.



- b) *Nenne begründet* die hier untersuchte Strahlungsart und *beschreibe* das Verhalten der beiden anderen Strahlungsarten!

Bereits durch die erste Alu-Schicht wird die Alphastrahlung vollständig absorbiert. Die Gammastrahlung geht nahezu ungehindert durch 1mm Aluminium hindurch. Absorbiert wird hier die Betastrahlung. Von ihr ist bekannt, dass sie sich durch Aluminium geringer Stärke bereits teilweise absorbieren lässt.

- c) *Berechne* die Halbwertsdicke x_H *mit einem grundlegenden Ansatz!*

Gesucht ist die Dicke der Aluschicht, die die Anfangsrate Z_0 auf die Hälfte absorbiert.

$$\frac{1}{2} \cdot Z_0 = Z_0 \cdot e^{-\lambda \cdot x_H} \Leftrightarrow \frac{1}{2} = e^{-\lambda \cdot x_H} \Leftrightarrow \ln\left(\frac{1}{2}\right) = -\lambda \cdot x_H \Leftrightarrow 0 - \ln(2) = -\lambda \cdot x_H \Leftrightarrow x_H = \frac{\ln(2)}{\lambda}.$$

Daraus folgt: $x_H \approx 0,40 \text{ mm}$. Dies ist auch in Abb.1 schon ungefähr zu erkennen.

Aufgabe 3

Americium 241 sendet α -Teilchen aus.

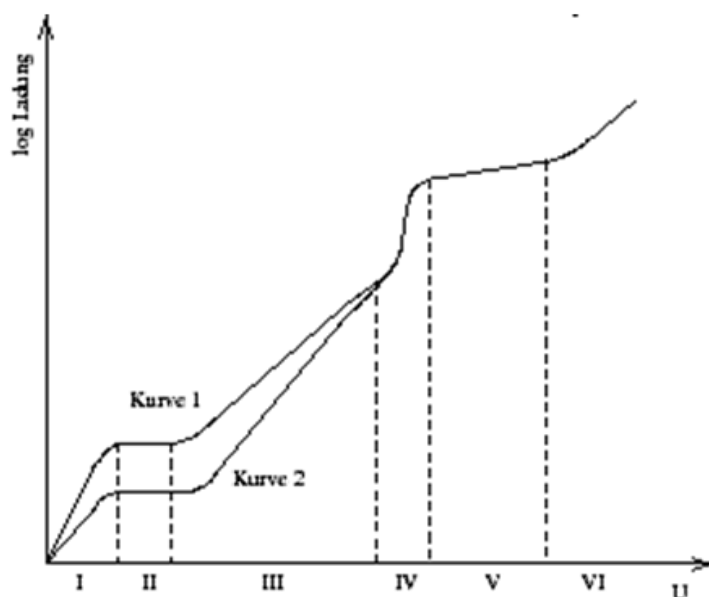
- a) Die α -Teilchen bewegen sich im Vakuum nach Verlassen eines Geschwindigkeitsfilters mit der Energie von $E = 5,488 \text{ MeV}$ durch die in Abb.2 skizzierte Anordnung von links nach rechts. Der Bahnradius im homogenen Magnetfeld mit der magnetischen Flussdichte $B = 0,33 \text{ T}$ beträgt $r = 1 \text{ m}$.
 Berechne aus den gegebenen Daten die Geschwindigkeit v der α -Teilchen sowie ihre spezifische Ladung!
 Begründe, dass allein die Bestimmung der spezifischen Ladung nicht zur Identifizierung der α -Teilchen ausreicht!

Die Geschwindigkeit lässt sich aus der Energieangabe berechnen:

$$E = \frac{1}{2} m_\alpha v^2 \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2E}{m_\alpha}} \Rightarrow v \approx 1,6268 \cdot 10^7 \frac{\text{m}}{\text{s}} \approx 5,4\% \cdot c.$$

Im Magnetfeld werden die Alphateilchen auf eine Kreisbahn gelenkt; hierbei spielt die Lorentzkraft die Rolle der Zentralkraft. Es gilt: $F_L = F_Z \Leftrightarrow q \cdot v \cdot B = \frac{m_\alpha \cdot v^2}{r} \Rightarrow \frac{q}{m_\alpha} = \frac{v}{r \cdot B} \Rightarrow \frac{q}{m_\alpha} \approx 4,9298 \cdot 10^7 \frac{\text{C}}{\text{kg}}$. (Die spezifische Ladung nach Formelsammlung beträgt $4,8225 \cdot 10^7 \frac{\text{C}}{\text{kg}}$.) Der gefundene Wert gibt nur das Verhältnis zwischen der Ladung und der Masse an. Er könnte also auch ein Vielfaches der spezifischen Ladung sein.

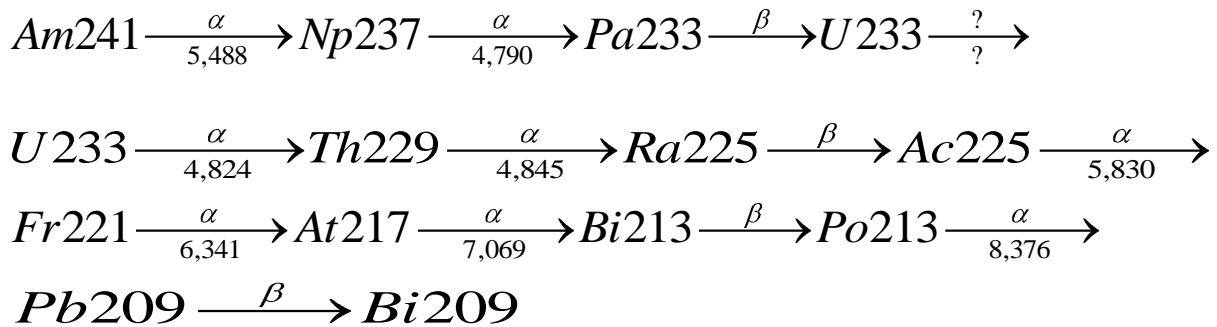
- b) Das Geiger-Müller-Zählrohr ist ein Nachweisgerät für Kernstrahlung.
 Skizziere die Zählrohrcharakteristik und deute den für eine Energiemessung geeigneten Bereich!



Die Spannung entscheidet, in welcher Funktion das Zählrohr arbeitet. Im Bereich I gelangen aufgrund niedriger Spannung und noch möglicher Rekombination nicht alle erzeugten Ladungsträger zu den Elektroden. Im Bereich II ist der Strom gesättigt, alle erzeugten Ladungsträgerpaare werden als Strom gemessen. Im Bereich III wächst die Stromstärke auf Grund der Stoßionisation erneut an. Die primär durch die Strahlung erzeugten Elektronen können im elektrischen Feld genügend Energie aufnehmen, um Sekundärladungen zu erzeugen. Mit diesem so genannten Proportional-Bereich kann man die Energie der radioaktiven Strahlung bestimmen, da die durch Sekundärionisation erzeugte Ladung proportional zur primär erzeugten Ladung ist und diese wiederum von der Energie der einfallenden Strahlung abhängt. Bereich IV führt in den Bereich V

über, in dem Impulse gezählt werden können, da jedes einfallende Strahlungsteilchen oder Quant den gleichen Stromstoß auslöst (Auslösebereich). Danach kommt es in VI zur zerstörerischen Gasentladung. Kurve 1 liegt in den Anfangsbereichen höher als Kurve 2. Sie stellt die Vorgänge bei einem Präparat höherer Aktivität dar.

- c) Die ersten Tochterkerne von Americium 241 sind in unserer Formelsammlung nicht erkennbar. Stelle mit Hilfe der Abb.3 und der Nuklidkarte aus unserer Formelsammlung die Zerfallsreihe von *Am241* dar!



Skizziere das zu erwartende α – Energiespektrum, das mit einem Zählrohr aufgenommen werden könnte und erläutere seine Besonderheiten !

Die Zerfallsreihe enthält 8 Alphazerfälle, die Energie der Strahlung kann der Nuklidkarte entnommen werden. Zu erwarten sind 5 oder 6 Impulsmaxima zu den einzelnen Energien. Drei Energien (4,790 – 4,824 – 4,845) liegen sehr nah beieinander, ebenso (5,488 – 5,830), so dass hierzu wohl ein gemeinsames Maximum gemessen werden könnte. Mit Hilfe der Halbwertszeiten der einzelnen Alphazerfälle könnte man jetzt noch eine grobe Aussage zur Höhe der Maxima treffen: zerfällt ein Präparat in kurzer Zeit, so ist die Impulsrate höher als wenn es in längerer Zeit zerfällt. Es muss aber auch beachtet werden, dass sich das Mutternuklid und alle Tochternuklide gleichzeitig in der Probe befinden. Da selbst die Strahlung gleicher Herkunft unterschiedliche Energien aufweist, haben auch alle Peaks eine gewisse Breite.

